

Nomographie in der Versicherung

dargestellt am Beispiel der Risikozwischenversicherung

INAUGURALDISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER UNIVERSITÄT BASEL

VON

Marcel Pfulg

aus Flühli (Luzern)

Olten, 1953

Georg Rentsch Söhne

Nomographie in der Versicherung

dargestellt am Beispiel der Risikozwischenversicherung

INAUGURALDISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER UNIVERSITÄT BASEL

VON

Marcel Pfulg

aus Flühli (Luzern)

Olten, 1953

Georg Rentsch Söhne

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag der

Herren Professoren Dr. E. Zwinggi und Dr. M. Gürtler.

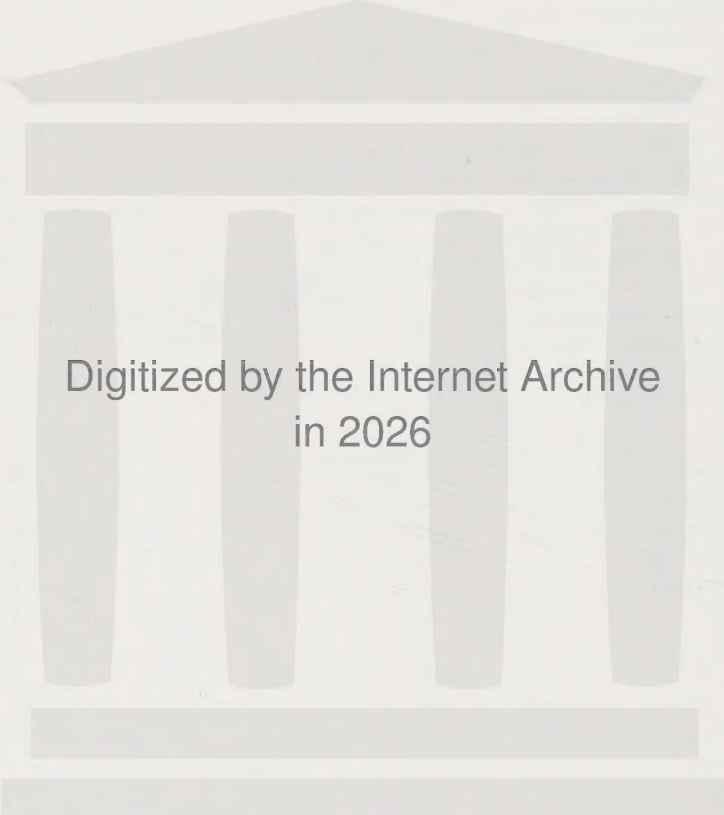
Basel, den 17. Februar 1953.

Prof. Dr. P. Huber
Dekan



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	5
<i>I. Abschnitt: Mathematische Grundlagen der Risikozwischenversicherung</i> . .	6
§ 1. Allgemeine Äquivalenzgleichung der Risikozwischenversicherung . .	6
§ 2. Die Risikozwischenversicherung für verschiedene Versicherungsformen bei einer Aussetzungszeit von einem Jahr	7
§ 3. Die Risikozwischenversicherung für eine Aussetzungszeit von zwei und drei Jahren	8
§ 4. Näherungsgleichungen	9
§ 5. Das Zillmerdeckungskapital in der Risikozwischenversicherung . . .	10
<i>II. Abschnitt: Nomographie</i>	11
§ 1. Funktionsleitern.	11
§ 2. Ablesegenauigkeit und Wahl der Zeicheneinheit	12
§ 3. Die Leitertafel	13
§ 4. Allgemeine Theorie der Fluchtlinientafeln	15
§ 5. Typ I. Drei geradlinige parallele Leitern	16
§ 6. Typ II. Drei geradlinige Leitern, davon zwei parallel	17
§ 7. Typ III. Zwei parallele geradlinige Leitern, eine krummlinige Leiter .	18
§ 8. Typ IV. Zwei parallele geradlinige Leitern, ein Kurvennetz	19
§ 9. Die kollineare Abbildung	20
§ 10. Kollineare Abbildung der Fluchtlinientafel IV	22
§ 11. Fluchtlinientafel mit Zapfenlinie	23
<i>III. Abschnitt: Die Konstruktion von Nomogrammen</i>	25
§ 1. Nomogramm I. Typ IV	25
§ 2. Nomogramm II. Typ II	30
§ 3. Nomogramm III. Typ I	34
Zusammenfassung	41
Literaturverzeichnis	43



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Überall dort, wo Berechnungen durch die Vielzahl ihrer Wiederholung zu einer Vereinfachung zwingen oder wo für Planungsarbeiten eine Übersicht rasch gewonnen werden soll, werden graphische Rechentafeln, sogenannte Nomogramme, das geeignete Hilfsmittel sein. In den meisten Fällen wird die Genauigkeit des Nomogramms genügen, weil entweder die Aufgabe infolge ihres Näherungscharakters keine größere Genauigkeit zuläßt oder aber, weil für Überschlagsrechnungen keine große Genauigkeit verlangt wird.

Die vorliegende Arbeit ist der nomographischen Behandlung eines *versicherungstechnischen Problems*, der Risikozwischenversicherung, gewidmet. Im ersten Abschnitt wird die Risikozwischenversicherung als solche eingehend dargestellt. Der zweite Abschnitt gibt eine Übersicht über die für versicherungsmathematische Aufgaben zweckmäßigen Nomogrammtypen und der dritte Abschnitt endlich zeigt die praktische Anwendung der Nomographie auf die Risikozwischenversicherung, indem drei wesentliche Nomogramme entworfen und deren Konstruktion erläutert werden.

I. Abschnitt: Mathematische Grundlagen der Risikozwischenversicherung

§ 1. Allgemeine Äquivalenzgleichung der Risikozwischenversicherung.

In Zeiten wirtschaftlicher Depression nehmen die vorzeitigen Rücktritte vom Versicherungsvertrag regelmäßig zu. Dieser sowohl für den Versicherten wie für den Versicherer abträglichen Entwicklung wird durch die sogenannte Risikozwischenversicherung erfolgreich begegnet. Ist es dem Versicherten infolge finanzieller Schwierigkeiten nicht mehr möglich, die Prämie voll zu bezahlen, so wird ihm der Versicherer die Aussetzung der normalen Prämienzahlung für eine bestimmte Zeit unter Aufrechterhaltung der Deckung des Todesfallrisikos, sofern dieses mitversichert ist, zugestehen. Der Ausfall an Normalprämien wird durch Verschieben von Beginn und Ablauf der Versicherung um die entsprechende Zeitspanne ausgeglichen. Der Versicherte hat für die Deckung der Todesfalleistung während der Zwischenzeit eine Risikoprämie zu leisten und infolge Erhöhung des Tarifalters eine allfällig erforderliche Deckungskapitalergänzung; dagegen werden ihm die zur Deckungskapitalbildung nicht notwendigen Zinsen vergütet.

Bei unveränderlicher Tarifprämie gilt für den allgemeinen Fall die Ausgleichszahlung

$$Z = A_{x+t, n+k-t} - {}_tV_x - P \frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t}} a_{x+t+k, m-t}.$$

Hierin bedeuten

- $A_{x, n}$ die Einmalprämie der Versicherung für das ursprüngliche Eintrittsalter x und die Dauer n ,
- ${}_tV_x$ das Deckungskapital nach t Jahren,
- P die zukünftig zu entrichtende Prämie, zahlbar noch während $m-t$ Jahren,
- k die ganzzahlige Dauer der Zwischenversicherung.

Die Abbildung 1 vermittelt ein Bild über den Aufbau der Risikozwischenversicherung.

Für die Praxis kommt wohl am häufigsten die Dauer $k=1$ und die Prämie $P=P_{x+1, \overline{n}}$ in Frage. Wir werden jedoch auch die Aussetzungszeiten $k=2$ und $k=3$ betrachten.

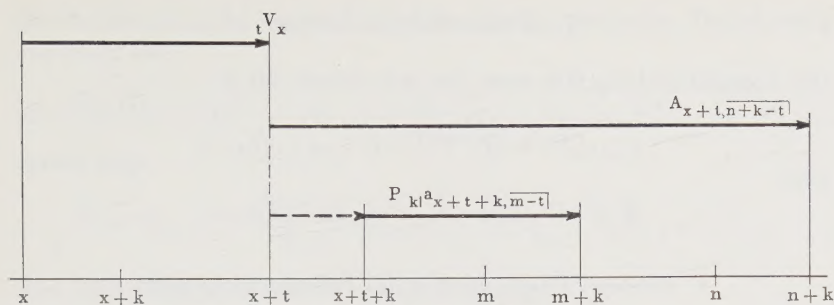


Abbildung 1: Aufbau der Risikozwischenversicherung

§ 2. Die Risikozwischenversicherung für verschiedene Versicherungsformen bei einer Aussetzungszeit von einem Jahr.

Wir legen den Betrachtungen vorläufig das Nettodeckungskapital zugrunde.

1. Gemischte Versicherung.

Zu Beginn der Aussetzungszeit liegt für l_{x+t} Versicherte das Deckungskapital ${}_tV_x$ vor. Die Versicherten leisten die Ausgleichszahlung Z ; somit ist Wert Ende der Aussetzungsperiode $l_{x+t}({}_tV_x + Z)(1+i)$ eingezahlt. Innett Jahresfrist sterben $l_{x+t} \cdot q_{x+t}$ Personen. Für die verbleibenden l_{x+t+1} Versicherten ist Ende Jahr das Deckungskapital ${}_tV_{x+1}$ notwendig. Die Äquivalenzgleichung lautet also

$$l_{x+t}({}_tV_x + Z)(1+i) - l_{x+t} q_{x+t} = l_{x+t+1} \cdot {}_tV_{x+1} \quad (1)$$

Daraus läßt sich die Ausgleichszahlung Z , auch Nettoprämie der Risikozwischenversicherung oder Zwischenprämie genannt, angeben zu

$$Z = vq_{x+t} + vp_{x+t} \cdot {}_tV_{x+1} - {}_tV_x$$

oder

$$Z = v{}_tV_{x+1} - {}_tV_x + vq_{x+t}(1 - {}_tV_{x+1}) \quad (2)$$

2. Temporäre und lebenslängliche Todesfallversicherung.

Für die temporäre Todesfallversicherung mit durchlaufender Prämienzahlung und die lebenslängliche Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung gilt die Formel (2) formal unverändert.

3. Erlebensfallversicherung.

Die Todesfallzahlung fällt weg. Aus dem Ansatz für Z

$$l_{x+t}({}_tV_x + Z)(1+i) = l_{x+t+1} \cdot {}_tV_{x+1}$$

folgt

$$Z = v_t V_{x+1} - {}_tV_x - vq_{x+t} \cdot {}_tV_{x+1}.$$

4. Erlebensfallversicherung mit Prämienrückgewähr.

Wir treffen die Annahme, daß bei Ableben während der Aussetzungsperiode nur die Normalprämien zurückbezahlt werden, die Prämie der Zwischenversicherung dagegen dem Versicherer verbleibe. Wir erhalten

$$Z = v_t V_{x+1} - {}_tV_x + vq_{x+t}({}_tP_x - {}_tV_{x+1}).$$

5. Versicherung auf bestimmte Verfallzeit und Familienversicherung.

Die Todesfalleistung im Versicherungsjahr t ist v^{n-t-1} . Für die Versicherung auf bestimmte Verfallzeit wird die Ausgleichszahlung somit

$$Z = v_t V_{x+1} - {}_tV_x + vq_{x+t}(v^{n-t} - {}_tV_{x+1}).$$

Wird nach dem Ableben des Versicherten noch eine Zeitrente in der Höhe u des Kapitals «1» (Familienversicherung) fällig, so folgt

$$Z = v_t V_{x+1} - {}_tV_x + vq_{x+t}[(v^{n-t} + ua_{n-t}) - {}_tV_{x+1}].$$

§ 3. Die Risikozwischenversicherung für eine Aussetzungszeit von zwei und drei Jahren.

Die Aussetzung der normalen Prämienzahlung wird in der Praxis üblicherweise nur für ein Jahr auf einmal gewährt. Ist es dem Versicherten nach Ablauf des Jahres nicht möglich, die volle Prämie wieder zu bezahlen, so kann er die Zwischenversicherung für ein weiteres Jahr beantragen. Die Ausgleichszahlung Z wird so jedes Jahr neu ermittelt. Theoretisch ist es aber ohne weiteres möglich, Z für die Dauer von zwei und drei Jahren auf direktem Wege zu ermitteln.

Die Ausdehnung des Ansatzes (1) führt für die gemischte Versicherung mit $k=2$ auf

$$l_{x+t}({}_tV_x + Z)(1+i)^2 - l_{x+t}q_{x+t}(1+i) - l_{x+t+1}q_{x+t+1} = l_{x+t+2} \cdot {}_tV_{x+2};$$

daraus folgt

$$Z = vq_{x+t} + v^2 \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} q_{x+t+1} + v^2 \frac{l_{x+t+2}}{l_{x+t}} {}_tV_{x+2} - {}_tV_x,$$

oder nach Elimination der Überlebensordnung

$$Z = iv^2q_{x+t} + v^2{}_tV_{x+2} - {}_tV_x + v^2{}_2q_{x+t}(1 - {}_tV_{x+2}). \quad (3)$$

Auf analoge Weise finden wir die Ausgleichszahlung für $k=3$

$$Z = iv^2q_{x+t} + iv^3{}_2q_{x+t} + v^3{}_tV_{x+3} - {}_tV_x + v^3{}_3q_{x+t}(1 - {}_tV_{x+3}). \quad (4)$$

§ 4. Näherungsgleichungen.

Um den Rahmen der Untersuchung nicht zu sprengen, wollen wir im weitem Verlauf nur noch die gemischte Versicherung betrachten.

Mit Rücksicht auf die praktische Handhabung lassen sich die Formeln (2), (3) und (4) vorteilhaft umgestalten. Führen wir die Näherungen $v \sim 1-i$ und ${}_tV_x \sim {}_tV_{x+1}$ ein, so folgt aus (2)

$$\underline{Z \sim vq_{x+t}(1 - {}_tV_x) - i{}_tV_x.} \quad (5)$$

Darin bedeuten $vq_{x+t}(1 - {}_tV_x)$ die Risikoprämie, berechnet mit der Risikosumme $(1 - {}_tV_x)$ und $i{}_tV_x$ den Zins auf dem Deckungskapital ${}_tV_x$ für ein Jahr.

Verwenden wir in Formel (3) die Näherungen $iv^2{}_2q_{x+t} \sim 0$ und ${}_tV_x \sim {}_tV_{x+2}$, so wird

$$\underline{Z \sim v^2{}_2q_{x+t}(1 - {}_tV_x) - {}_tV_x(1 - v^2).} \quad (6)$$

Ebenso erhalten wir aus (4), wenn beachtet wird, daß $iv^2{}_2q_{x+t} + iv^3{}_2q_{x+t} \sim 0$ und ${}_tV_x \sim {}_tV_{x+3}$ gelten soll, die Ausgleichszahlung

$$\underline{Z \sim v^3{}_3q_{x+t}(1 - {}_tV_x) - {}_tV_x(1 - v^3).} \quad (7)$$

§ 5. Das Zillmerdeckungskapital in der Risikozwischenversicherung.

Wir wollen Gleichung (5) der Praxis besser anpassen, indem wir das Netto-
deckungskapital ${}_tV_x$ durch das Zillmerdeckungskapital ${}_tV_x^a = (1+a) {}_tV_x - a$
ersetzen.

Es ist

$$Z_{k=1}^a \sim vq_{x+t} - (vq_{x+t} + i) {}_tV_x^a$$

oder

$$Z_{k=1}^a \sim vq_{x+t} - (vq_{x+t} + i) [{}_tV_x(1+a) - a] . \quad (8)$$

Stellen wir das Deckungskapital noch mit dem Rentenbarwert dar, so
vereinfacht sich (8) zu

$$Z_{k=1}^a \sim (vq_{x+t} + i)(1+a) \frac{a_{x+t,z}}{a_{x,z}} - i . \quad (9)$$

Auf dem gleichen Wege erhalten wir aus (6) und (7) die gezillmerten
Zwischenprämien für zwei- bzw. dreijährige Aussetzungszeit:

$$Z_{k=2}^a \sim \left[v^2 {}_2q_{x+t} + (1-v^2) \right] \left[(1+a) \frac{a_{x+t,z}}{a_{x,z}} \right] - (1-v^2) \quad (10)$$

und

$$Z_{k=3}^a \sim \left[v^3 {}_3q_{x+t} + (1-v^3) \right] \left[(1+a) \frac{a_{x+t,z}}{a_{x,z}} \right] - (1-v^3) . \quad (11)$$

Die Näherungsgleichungen (9), (10) und (11) bzw. (5), (6) und (7) werden
von der Praxis als genügend genau erachtet und für ihre Berechnungen
verwendet. Wir werden deshalb bei der nomographischen Behandlung
(III. Abschnitt) von diesen Gleichungen ausgehen.

II. Abschnitt: Nomographie

Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die Grundlagen der Nomographie dem Versicherungsmathematiker nur wenig geläufig sind, ist dieser Abschnitt ziemlich ausführlich gehalten.

Aus der Fülle der nomographischen Rechenmethoden greifen wir jene Verfahren heraus, die sich für die Lösung unserer Aufgabe als zweckmäßig erweisen, die aber gleichzeitig für versicherungsmathematische Probleme von allgemeiner und grundlegender Bedeutung sind.

§ 1. Funktionsleitern.

Meßstäbe und Skalen, bei denen die Teilstriche gleiche Abstände haben, nennen wir *gleichförmige* oder *reguläre Leitern*.

Eine Zahlenfolge a_i läßt sich geometrisch durch eine reguläre Skala wiedergeben (Abb. 2).

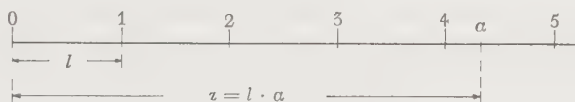


Abbildung 2: Reguläre Leiter

Die gleichbleibende Strecke l , deren Länge eine Einheit beträgt, heißt *Zeicheneinheit* oder *Modul*.

Ändern sich die Abstände der Teilstriche nach einem bestimmten Gesetz, so sprechen wir von einer *Funktionsleiter*; das Bildungsgesetz einer solchen Leiter können wir durch die Gleichung

$$z = l f(a)$$

ausdrücken. Wir können eine Leiter der Funktion $f(a)$ in der Zeicheneinheit l mm herstellen, indem wir auf einem Träger die Strecken $l f(a)$ mm von einem Nullpunkt aus zeichnen und die Endpunkte nach dem Argument a beziffern (Abb. 3).

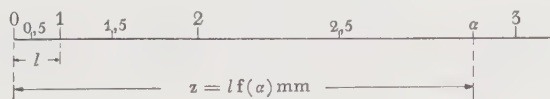


Abbildung 3: Funktionsleiter

Ein Träger, der auf beiden Seiten beziffert ist, heißt *Doppelleiter*. Jeder Punkt desselben gibt das Bild eines Wertepaares (α, β) wieder. Die Doppelleiter ersetzt auf einfachste Weise das Kurvenbild einer Funktion. So können wir z. B. das Alter x und die Jahresprämie für eine beliebige Versicherung auf einer Doppelleiter darstellen (Abb. 4).



Abbildung 4: Doppelleiter

§ 2. Ablesegenauigkeit und Wahl der Zeicheneinheit.

Bevor wir an den Entwurf einer Leiter gehen, müssen wir untersuchen, mit welcher Genauigkeit die gegebenen Funktionswerte aufgetragen und abgelesen werden sollen. Gewöhnlich nimmt man die Angabe dieser Werte so vor, daß der Fehler kleiner ist als eine halbe Einheit der letzten Dezimale. Bei einwandfreier Zeichnung können wir in Intervallen von ein bis zwei Millimeter noch 0,1 mm abschätzen. Der minimale Ablesefehler ist dann $\pm 0,05$ mm. Ist nun der maximale absolute Fehler der Tabellenwerte $\pm s$, so wählt man als untere Grenze der Zeicheneinheit

$$l = \frac{0,05}{s} \text{ mm} = \frac{\text{zulässiger Ablesefehler in mm}}{\text{Tabellenfehler}}$$

Umgekehrt kann bei gegebener Zeicheneinheit der zulässige Fehler s bestimmt werden zu

$$s = \frac{0,005}{l}.$$

So findet man z. B. für eine logarithmische Teilung $z = l \log \alpha$ mit $l = 250$ mm einen Fehler in z von

$$s = \frac{0,05}{250} = \frac{1}{5000} = 1z.$$

Aus der Beziehung $z = \log \alpha$ folgt weiter durch Differentiation

$$dz = \frac{d\alpha}{\alpha} \log e.$$

Diesen Ausdruck kann man auch für kleine endliche Differenzen benutzen :

$$\Delta z = \frac{\Delta a}{a} \log e ;$$

daraus wird der Fehler in a ,

$$\Delta a = \frac{\Delta z}{\log e} a ;$$

nach Einsetzen von $\log e = 0,434$ erhalten wir schließlich den *absoluten Ablesefehler*

$$\Delta a = \frac{a \cdot 0,05}{0,43 \cdot l} \text{ oder } \Delta a \sim \frac{a}{9l} .$$

Der Fehler einer Ablesung oder Einstellung z. B. auf einer logarithmischen Skala von 250 mm Länge beträgt

$$\Delta a \sim \frac{a}{9 \cdot 250} = 0,00045 a ,$$

das heißt kaum 0,05% von a .

Der *prozentuale Ablesefehler* berechnet sich zu

$$100 \cdot \frac{\Delta a}{a} \sim \frac{10}{l} \% .$$

Er ist längs der ganzen logarithmischen Leiter *konstant*. Diese Eigenschaft der logarithmischen Leitern ist ein wichtiger Grund für ihre bevorzugte Stellung in der Nomographie.

§ 3. Die Leitertafel.

Der Aufbau einer Leitertafel fußt auf einer einfachen geometrischen Überlegung. Es seien drei parallele Geraden mit gleichen Abständen in einer Ebene gegeben. Werden diese drei Parallelen durch zwei Geraden g_1 und g_2 in beliebiger Lage geschnitten, so gilt für die Mittellinie des Trapezes (Abb. 5)

$$\frac{a+b}{2} = c \quad \text{oder} \quad a+b = 2c . \quad (12)$$

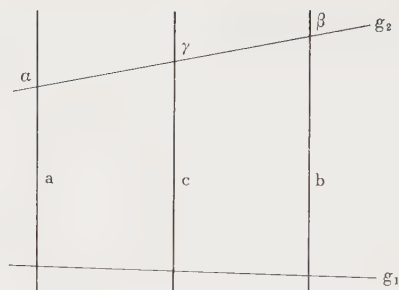


Abbildung 5: Schema einer Leitertafel

Es liegt nun nahe, an die drei Parallelen Funktionsleitern in geeignetem Maßstab anzulegen derart, daß ihre Anfangspunkte auf g_1 liegen. Auf diese Weise erhalten wir durch Auftragen der *regulären Leitern* $a = l \text{ mm}$, $b = l \beta \text{ mm}$ und $c = \frac{1}{2} l \gamma \text{ mm}$ eine einfache *Additionstafel*; denn es gilt für die Werte a, β, γ , die in den Schnittpunkten der Parallelen mit g_2 abgelesen werden können, nach (12) die Gleichung

$$a + \beta = \gamma . \quad (13)$$

Legen wir anstelle der regulären die *logarithmischen Leitern* $a = l \log a \text{ mm}$, $b = l \log \beta \text{ mm}$, $c = \frac{1}{2} l \log \gamma \text{ mm}$ an, so gewinnen wir die *Multiplikationstafel* (Abb. 6). Aus $\log a + \log \beta = \log \gamma$ folgt nämlich

$$a \cdot \beta = \gamma . \quad (14)$$

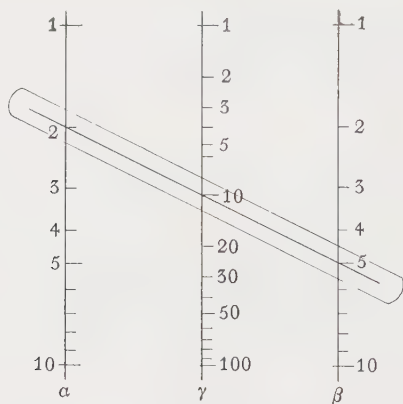


Abbildung 6: Multiplikationstafel

Die drei abgelesenen Werte α, β, γ genügen nur dann der Funktion (13) bzw. (14), wenn sie auf einer Geraden, einer sogenannten «Flucht» liegen. Das Verfahren wird daher auch «Methode der fluchtrecten Punkte» genannt und die Tafeln heißen «*Fluchtlinientafeln*».¹⁾

§ 4. Allgemeine Theorie der Fluchtlinientafeln.

Im rechtwinkligen (x,y)-Koordinatensystem sei die Leiter (α) durch die *Parameterdarstellung*

$$x_1 = x_1(\alpha) \quad , \quad y_1 = y_1(\alpha)$$

gegeben. Entsprechend stellen die Funktionen

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2(\beta) \quad , \quad y_2 = y_2(\beta) \quad , \\ x_3 &= x_3(\gamma) \quad , \quad y_3 = y_3(\gamma) \end{aligned}$$

die Leitern für (β) und (γ) dar. Im Folgenden kürzen wir die Funktionen $x_1(\alpha), \dots, y_3(\gamma)$ mit $x_1, \dots, y_3$ ab. Der Wert α sei nun auf der Leiter (α) durch den Punkt (x_1, y_1) festgelegt, ebenso seien es die Werte β und γ durch (x_2, y_2) und (x_3, y_3) auf der Leiter (β) bzw. (γ). Wiederum fordern wir, daß die drei Werte α, β, γ , welche durch die Beziehung $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ miteinander verbunden sind, auf einer Geraden liegen. Drei beliebige Punkte liegen in einer Geraden, sofern ihre Koordinaten der Determinante genügen

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (15)$$

Durch Auswerten folgt

$$x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2 + x_1 y_1 = 0 \quad ,$$

oder

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad . \quad (16)$$

¹⁾ Das Ablesen der Werte α, β, γ kann mit einem Lineal oder einem gespannten Faden vorgenommen werden. Am zweckmäßigsten hat sich ein hochtransparenter Kunststoffstreifen erwiesen, auf dessen Unterseite mit einer feinen Nadel ein Haarstrich eingeritzt ist.

Fassen wir die Glieder anders zusammen, so gilt auch

$$\underline{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0} \quad (17)$$

und

$$\underline{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0} . \quad (18)$$

Diese Beziehungen gestatten uns den Aufbau der für die Praxis wichtigsten Fluchtlinientafeln. Je nach Form und Lage der Träger unterscheiden wir die fünf folgenden Typen:

- I. Tafel mit drei geradlinigen parallelen Leitern,
- II. Tafel mit drei geradlinigen Leitern, davon zwei parallel,
- III. Tafel mit zwei geradlinigen parallelen Leitern und einer krummlinigen Leiter,
- IV. Tafel mit zwei geradlinigen parallelen Leitern und einem Kurvennetz,
- V. Tafel mit Zapfenlinie.

Die Typen I., II. und III. dienen der Darstellung von Beziehungen zwischen drei veränderlichen Größen. Mit Typ IV. können Gleichungen mit vier und mit Typ V. solche mit vier und mehr Variablen vertafelt werden. Zur Vereinfachung der Darstellung verlegen wir stets einen der Träger in eine der Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems.

§ 5. Typ I. Drei geradlinige parallele Leitern.

Wir legen die Leiter (α) in die y-Achse; die (β)- und (γ)-Leitern zeichnen wir im Abstand ϱ bzw. σ in bezug auf die y-Achse. Somit gilt der Ansatz

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 , \\ x_2 &= \varrho = \text{konstant} , \\ x_3 &= \sigma = \text{konstant}, (\varrho \neq \sigma) . \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Werte in (18) erhalten wir die Gleichung

$$y_1(\varrho - \sigma) + y_2\sigma - y_3\varrho = 0 .$$

Daraus gewinnen wir, wenn noch

$$x_1 = 0 \quad , \quad y_1 = \frac{l}{\varrho - \sigma} f_1(\alpha) ,$$

$$x_2 = \varrho m \quad , \quad y_2 = \frac{l}{\varrho} f_2(\beta) ,$$

$$x_3 = \sigma m \quad , \quad y_3 = \frac{-l}{\varrho} f_3(\gamma)$$

gesetzt wird, die *Strukturgleichung*

$$\underline{f_1(\alpha) + f_2(\beta) + f_3(\gamma) = 0} . \quad (19)$$

Sie besagt: Gelingt es, irgend eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen α, β, γ in die Form (19) zu bringen, wo f_1, f_2 und f_3 beliebige Funktionen sind, so läßt sie sich durch eine Fluchtlinientafel mit drei parallelen geradlinigen Leitern darstellen.

Die Wahl der Zeicheneinheiten l und m , sowie der Abstände ϱ und σ ist grundsätzlich beliebig. Sie richtet sich praktisch jedoch nach der Größe des zur Verfügung stehenden Zeichenblattes und nach einer zweckmäßigen Ausgestaltung des Nomogramms. Im Abschnitt III. werden wir diese Gesichtspunkte anhand eines Nomogrammentwurfs eingehend erörtern.

§ 6. Typ II. Drei geradlinige Leitern, davon zwei parallel.

Diese Tafel trägt ihrer äußern Form wegen den Namen N- oder Z-Tafel. Sie ergibt sich aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 , \\ x_2 &= \varrho , \\ y_3 &= y_3(\gamma) = c x_3(\gamma) . \end{aligned}$$

Damit geht Gleichung (18) über in

$$y_1 \left(\frac{\varrho}{x_3} - 1 \right) + (y_2 - \varrho c) = 0$$

oder

$$y_1(\varrho - x_3) + y_2 x_3 - \varrho c x_3 = 0 .$$

Wenn wir jetzt

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & y_1 &= lf_1(a), \\x_2 &= q, & y_2 &= qc + lf_2(\beta), \\x_3 &= \frac{q}{1 + mf_3(\gamma)}, & y_3 &= \frac{qc}{1 + mf_3(\gamma)}\end{aligned}$$

setzen, läßt sich die *Grundform* schreiben als

$$\underline{f_1(a) \cdot f_3(\gamma) + f_2(\beta) = 0.} \quad (20)$$

In Abschnitt III. werden wir ein Nomogramm auf Grund dieser Gleichung entwerfen.

§ 7. Typ III. Zwei parallele geradlinige Leitern, eine krummlinige Leiter.

Neben den eben entwickelten Fluchtlinientafeln sind die wichtigsten die Tafeln mit zwei parallelen geradlinigen und einer krummlinigen Leiter. Wir nehmen an

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, \\x_2 &= q = 1.\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (16) und (17) folgt damit

$$y_3 - y_1 + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

und

$$y_1 = \frac{y_2 - \frac{y_3}{x_3}}{1 - \frac{1}{x_3}}. \quad (21)$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & y_1 &= f_1(a), \\x_2 &= 1, & y_2 &= lf_2(\beta), \\1 - \frac{1}{x_3} &= lg_3(\gamma), & \frac{y_3}{x_3} &= -lf_3(\gamma), \\x_3 &= \frac{1}{1 - lg_3(\gamma)}, & y_3 &= \frac{-lf_3(\gamma)}{1 - lg_3(\gamma)},\end{aligned}$$

so geht aus (21) die *Grundform*

$$\underline{f_1(\alpha) = \frac{f_2(\beta) + f_3(\gamma)}{g_3(\gamma)}} \quad (22)$$

hervor (Abb. 7).

Aus der Parameterdarstellung des Trägers (γ) kann durch Elimination von γ aus x_3 und y_3 die Gleichung des Trägers gefunden werden, welche für die Konstruktion des Nomogramms oft notwendig ist.

Die Gleichung (22) wird häufig auch in der Form geschrieben

$$g_1 \cdot F_3 + g_2 \cdot G_3 + H_3 = 0$$

oder

$$g_1(f_3 - c) + g_2(-f_3) + c \cdot g_3 = 0.$$

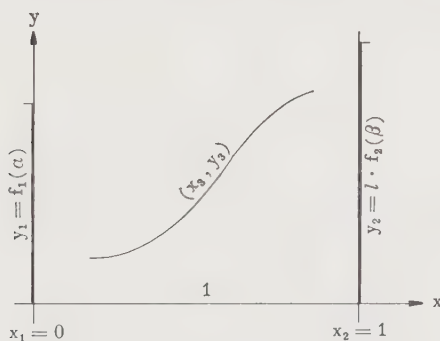


Abbildung 7: Schema. Nomogramm Typ III.

§ 8. Typ IV. Zwei parallele geradlinige Leitern, ein Kurvennetz.

In Erweiterung der Darstellung von § 7, setzen wir die Koordinaten x_3, y_3 als Funktionen *zweier* Veränderlichen (γ, δ) an:

$$x_3 = x_3(\gamma, \delta) \quad , \quad y_3 = y_3(\gamma, \delta).$$

Es entsteht so ein Netz von Kurven (γ) und Kurven (δ); jedes Wertepaar (γ, δ) wird dargestellt durch einen Bildpunkt des Netzes.

Nehmen wir sinngemäß zu § 7

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & y_1 &= f_1(\alpha), \\x_2 &= 1, & y_2 &= lf_2(\beta), \\x_3 &= \frac{1}{1 - lg_{3,4}(\gamma, \delta)}, & y_3 &= \frac{-lf_{3,4}(\gamma, \delta)}{1 - lg_{3,4}(\gamma, \delta)}\end{aligned}$$

an, so gewinnen wir die *Strukturgleichung*

$$\underline{f_1(\alpha) = \frac{f_2(\beta) + f_{3,4}(\gamma, \delta)}{g_{3,4}(\gamma, \delta)},} \quad (23)$$

wo $f_{3,4} \neq g_{3,4}$ sein muß, da sonst anstelle eines Netzes nur eine Kurve entsteht.

Damit haben wir eine Beziehung zwischen *vier* Veränderlichen gefunden, die durch ein Nomogramm darstellbar ist.

§ 9. Die kollineare Abbildung.

Die praktische Anwendung der Formen (22) und (23) zeigt bald, daß ihre Ansätze in bezug auf eine geeignete Darstellung nicht voll befriedigen können. Wir wollen deshalb die beiden Tafeln einer *projektiven Verzerrung* (Schwerdt) oder kollinearen *Abbildung* (D'Ocagne) unterziehen.

Eine Leitertafel können wir kollinear abbilden, indem wir sie von einem Zentrum aus auf eine Bildebene projizieren. Jedem Punkt der Grundebene entspricht dann eindeutig ein Punkt der Bildebene, jeder Geraden der Grundebene eindeutig eine Gerade der Bildebene und umgekehrt. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte gehen durch einen festen Punkt, das Kollineations- oder Projektionszentrum.

Diese grundlegende Eigenschaft kollinearer Abbildungen, alle geraden Linien wieder in Geraden überzuführen, erweist sich für den Aufbau der Nomogramme als äußerst fruchtbar; denn sie sichert die Erhaltung der Strukturgleichung unserer Fluchtlinientafeln.

Den vorstehend ausgesprochenen Sachverhalt können wir analytisch durch die folgende Darstellung wiedergeben. Die Punkte (x, y) der Grundebene werden durch linear gebrochene Funktionen in die Bildpunkte (ξ, η) der Bildebene abgebildet:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1}{\lambda_3 x + \mu_3 y + \nu_3} \\ \eta &= \frac{\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2}{\lambda_3 x + \mu_3 y + \nu_3}\end{aligned}\quad (24)$$

Die Auflösung dieses Systems nach den Punkten (x,y) der Grundebene verlangt, daß die Determinante

$$|D| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \quad (25)$$

nicht verschwindet. Durch Angabe der Matrix (1) ist aber eine projektive Abbildung völlig bestimmt.

Unterwerfen wir demnach eine Fluchtlinientafel der Grundebene, die durch den Ansatz (15)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

gegeben ist, einer kollinearen Abbildung, so geht sie allgemein in die Bildtafel

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu_1}{\lambda_3 x_1 + \mu_3 y_1 + \nu_3}, \frac{\lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 + \nu_2}{\lambda_3 x_1 + \mu_3 y_1 + \nu_3}, 1 \\ \frac{\lambda_1 x_2 + \mu_1 y_2 + \nu_1}{\lambda_3 x_2 + \mu_3 y_2 + \nu_3}, \frac{\lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2 + \nu_2}{\lambda_3 x_2 + \mu_3 y_2 + \nu_3}, 1 \\ \frac{\lambda_1 x_3 + \mu_1 y_3 + \nu_1}{\lambda_3 x_3 + \mu_3 y_3 + \nu_3}, \frac{\lambda_2 x_3 + \mu_2 y_3 + \nu_2}{\lambda_3 x_3 + \mu_3 y_3 + \nu_3}, 1 \end{vmatrix} = 0$$

über. Nach dem Multiplikationssatz der Determinanten können wir dafür einfacher schreiben

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Diese Beziehung ermöglicht es uns, aus einer speziellen Fluchtlinientafel durch Multiplikation mit einer beliebigen, nicht verschwindenden Determinante ∞^8 projektive Bilder zu finden, ohne daß dabei die Strukturgleichung geändert werden muß.

§ 10. Kollineare Abbildung der Fluchtlinientafel IV.

Auf Grund der Ausführungen in § 9 ist es uns nunmehr möglich, die Ansätze der Gleichungen (22) und (23) bedeutend schmiegsamer zu gestalten und so das Nomogramm den gegebenen Unterlagen und der geforderten Genauigkeit anzupassen.

Wir wollen die nach Gleichung (23) entworfene Tafel einer projektiven Verzerrung unterwerfen derart, daß

1. der Träger (α) , $x_1 = 0$, invariant bleibt,
2. die parallelen Träger (α) und (β) im Bild wieder parallel sind.

Die erste Forderung verlangt $\xi_1 = 0$; diese wird nach (24) befriedigt durch

$$\mu_1 = \nu_1 = 0. \quad (26)$$

Der zweiten Bedingung liegt der Affinitätssatz der projektiven Geometrie zu Grunde: Rückt das Kollineationszentrum ins Unendliche, so werden die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte parallel, und die zentrale Kollineation geht in die projektive Affinität über. Diese sichert die Invarianz paralleler Geraden.

Die Eigenschaft affiner Abbildungen, parallele Geraden wieder in parallele Geraden überzuführen, kann analytisch mit ganzen linearen Abbildungsgleichungen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 \\ \eta &= \lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2. \end{aligned}$$

Aus (24) erhalten wir diese Gleichungen, wenn wir

$$\lambda_3 = \mu_3 = 0 \quad \text{und} \quad \nu_3 = 1 \quad (27)$$

annehmen. Nach Einsetzen der Werte (26) und (27) in die Abbildungsdeterminante (25) ergibt sich aus dem Ansatz von Gleichung (23) der Grundebene derjenige der Bildtafel zu

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1(\alpha) & 1 \\ 1 & l \cdot f_2(\beta) & 1 \\ 1 & -l \cdot f_{3,4}(\gamma, \delta) & 1 - l \cdot g_{3,4}(\gamma, \delta) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = \quad (28)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \mu_2 \cdot f_1(\alpha) + \nu_2 & 1 \\ \lambda_1 & \mu_2 \cdot l \cdot f_2(\beta) + (\lambda_2 + \nu_2) & 1 \\ \lambda_1 & -\mu_2 \cdot l \cdot f_{3,4}(\gamma, \delta) - \nu_2 \cdot l \cdot g_{3,4}(\gamma, \delta) + (\lambda_2 + \nu_2) & 1 - l \cdot g_{3,4}(\gamma, \delta) \end{vmatrix}.$$

Damit haben wir den allgemeinsten Ansatz gefunden für die Darstellung der Funktion (23) durch eine Fluchtlinientafel mit zwei parallelen Trägern. Abbildung 8 zeigt ein Dispositiv des aus dem Ansatz (28) resultierenden Nomogramms.

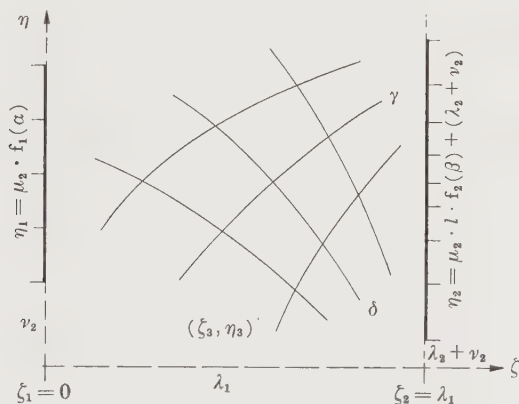


Abbildung 8: Schema. Nomogramm Typ IV, Ansatz (28)

Wie aus der Skizze ersichtlich ist, sind die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, l$ frei wählbar. Sie sind maßgebend für die Form und Lage des Funktionsnetzes (γ, δ) .

§ 11. Fluchtlinientafel mit Zapfenlinie.

Es wird nicht selten vorkommen, daß sich Gleichungen mit vier Veränderlichen nicht auf die Form (23) bringen lassen. Diese Lücke füllt eine Darstellung aus, bei der zwei Tafeln für je drei Variablen unter Zuhilfenahme einer sogenannten «Zapfenlinie» zusammengefaßt werden.

Die Gleichung $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$ können wir durch Einführung der Hilfsgröße t , welche auf die Zapfenlinie zu liegen kommt, schreiben

$$f(\alpha, \beta, t) = 0 \quad , \quad g(\gamma, \delta, t) = 0 \quad .$$

Das Verfahren läßt sich ohne weiteres auf mehr als vier Veränderliche ausdehnen. Ein einfaches Beispiel möge zur Erläuterung dienen: Die Gleichung mit fünf variablen Größen

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = f_5$$

läßt sich in die drei Teilbeziehungen zerlegen

$$f_1 + f_2 = t \quad ,$$

$$t + f_3 = u \quad ,$$

$$u + f_4 = f_5 \quad ,$$

welche einzeln nach dem Typ I, Gleichung (19) dargestellt werden können (Abb. 9).

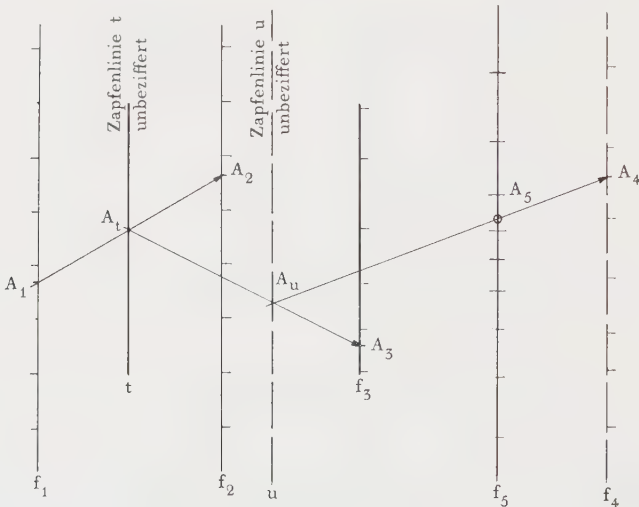


Abbildung 9: Schema. Tafel mit Zapfenlinien

III. Abschnitt: Die Konstruktion von Nomogrammen.

Nachdem wir im ersten Abschnitt die Formeln für die Ausgleichszahlung Z^a bei der gemischten Versicherung hergeleitet und in Abschnitt II die Grundlagen der Nomographie bereitgestellt haben, können wir an die Aufstellung von geeigneten Strukturgleichungen gehen.

In der Gleichung (9) treten die Konstanten i, v, a und die Funktionen $q_{x+t}, a_{x,z}, a_{x+t,z}, Z^a$ bzw. die Veränderlichen $x, x+t, z$ und Z^a auf. Je nach Wahl und Gruppierung dieser Veränderlichen werden wir verschiedene Grundgleichungen erhalten und damit auch zu konstruktiv verschiedenen Nomogrammen gelangen.

§ 1. Nomogramm I. Typ IV.

Gleichung (9) wird in der Praxis meist so verwendet, daß die verschiedenen Schlußalter durch ein einheitliches ersetzt werden unter Anpassung der individuellen Eintrittsalter.

Diese Vereinfachung wollen wir vorerst übernehmen. Gleichung (9) läßt sich wie folgt darstellen:

$$Z^a = vq_{x+t} - (vq_{x+t} + i) \left[1 - (1+a) \frac{a_{x+t,(z)}}{a_{x,(z)}} \right]^{1)}$$

Daraus gewinnen wir unmittelbar die Beziehung

$$(vq_{x+t} + i) = \frac{Z^a - vq_{x+t}}{- \left[1 - (1+a) \frac{a_{x+t,(z)}}{a_{x,(z)}} \right]} . \quad (29)$$

Damit ist aber die Strukturgleichung (25) des Nomogrammtyps IV gefunden. Für den allgemeinsten Entwurf des auf der Gleichung (29) aufgebauten Nomogramms steht der Ansatz (28) zur Verfügung. Vorerst sind nur dessen Funktionen

$$f_1 = vq_{x+t} + i \quad , \quad f_2 = Z^a ,$$

$$f_{3,4} = -vq_{x+t} \quad \text{und} \quad g_{3,4} = - \left[1 - (1+a) \frac{a_{x+t,(z)}}{a_{x,(z)}} \right]$$

¹⁾ Im folgenden wird $\approx$ durch $=$ ersetzt.

bekannt. Bevor an die Berechnung der Koordinaten $\xi_1, \dots, \eta_3$ geschritten werden kann, muß im Hinblick auf eine vorteilhafte Formgebung des zu entwerfenden Nomogramms die richtige Wahl der Parameter getroffen werden. Dem geübten Nomographen bereitet es keine große Mühe, die Parameter nach Augenmaß zu bestimmen. Wir wollen hier jedoch einen Weg aufzeigen, der es auch dem weniger Geübten ermöglicht, ohne Schwierigkeiten und ohne langes Probieren Nomogramme zu entwerfen. Nach (28) lautet der Ansatz für die Gleichung (29)

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \mu_2 [vq_{x+t} + i] + v_2; \\ \xi_2 &= \lambda_1, & \eta_2 &= \mu_2 \cdot l \cdot Z^\alpha + (\lambda_2 + v_2); \\ \xi_3 &= \frac{\lambda_1}{1 - l \cdot (-) \left[1 - (1 + \alpha) \frac{a_{x+t, (z)}}{a_{x, (z)}} \right]}, \\ \eta_3 &= \frac{-\mu_2 l (-vq_{x+t}) - v_2 l (-) \left[1 - (1 + \alpha) \frac{a_{x+t, (z)}}{a_{x, (z)}} \right]}{1 - l \cdot (-) \left[1 - (1 + \alpha) \frac{a_{x+t, (z)}}{a_{x, (z)}} \right]}.\end{aligned}$$

Wir wählen für das Nomogramm das Format Din A4. Die Darstellung soll alle Alter zwischen den Grenzen $x=20$ und $z=60$ umfassen¹⁾. Wir setzen voraus, daß die Ausgleichszahlung Z^α auf $1/10^0/00$ der Versicherungssumme genau ablesbar sei. Legen wir für Z^α die Zeicheneinheit $\mu_2 l = 10000$ mm fest, so wird der Wert $Z^\alpha = 0.0001$ als Strecke von einem Millimeter wiedergegeben.

Durch den Abstand der Leitern Z^α und $(vq_{x+t} + i)$ ist λ_1 festgelegt, wir wählen $\lambda_1 = 200$. Für die übrigen Parameter sind die vorgeschriebenen Bereiche bestimmend. Die Risikosumme $a_{x+t, (z)}/a_{x, (z)}$ im Nenner von ξ_3 bewegt sich zwischen den Werten 1 und 0. Die Abszisse ξ_3 nimmt dann folgende Ausdehnung an:

$$\begin{array}{ll}\text{Für } l = 1 & \text{von } 206,1 \text{ bis } 100 \text{ und} \\ \text{für } l = 2 & \text{von } 212,8 \text{ bis } 66,6.\end{array}$$

¹⁾ SM 1921–1950. $2 \frac{1}{2} \%$. $\alpha = 50\%$.

Die Werte ξ_3 lassen sich demnach mit $l = 2$ auf einem breitem Raum als mit $l = 1$ darstellen, was zu einer größeren Zeichengenauigkeit führt. Mit $l = 2$ ist wegen $\mu_2 l = 10000$ gleichzeitig $\mu_2 = 5000$ festgelegt.

Den Parameter ν_2 setzen wir gleich Null. Die Ermittlung von λ_2 kann wie folgt geschehen:

Für die Grenzalter $x + t = 20$ und $x + t = 60$ nimmt die Ordinate $\eta_1 = 5000 (vq_{x+t} + i)$ die Werte 142,8 bzw. 263,7 an. Der Mittelwert beträgt 200. Wenn wir nun verlangen, daß die Z^α - und $(x+t)$ -Skalen einander genau gegenüberliegen sollen, so muß der Nullpunkt von Z^α mit der Ordinate $\eta_2 = 200$ zusammenfallen, dies erreichen wir mit $\lambda_2 = 200$. Somit erhalten wir mit den Parametern

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 200, \quad \mu_2 = 5000, \quad l = 2 \quad \text{und} \quad \nu_2 = 0$$

den endgültigen Ansatz für unser Nomogramm

$$\begin{aligned} (x+t) \text{-Leiter: } \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= 5000 (vq_{x+t} + i); \\ Z^\alpha \text{-Leiter: } \xi_2 &= 200, & \eta_2 &= 10000 Z^\alpha + 200; \\ (x, x+t) \text{-Netz: } \xi_3 &= \frac{200}{3 - \frac{2a_{x+t,(z)} \cdot 1,03}{a_{x,(z)}}}, & \eta_3 &= \frac{10000 vq_{x+t} + 200}{3 - \frac{2a_{x+t,(z)} \cdot 1,03}{a_{x,(z)}}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Dabei wird die η -Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems Träger der nach $\eta_1 = 5000 (vq_{x+t} + i)$ unregelmäßig geteilten Skala; ihre Bezeichnung geschieht direkt nach $x + t$. Entsprechend trägt die im Abstand $\lambda_1 = 200$ zur η -Achse gezogene Parallele die reguläre Teilung Z^α . Das Kurvennetz wird durch die Punkte (ξ_3, η_3) dargestellt, die für $x = \text{konstant}$ und $x + t = \text{konstant}$ in je eine Kurvenschar zusammengefaßt werden können. Die beiden Kurvenscharen werden nach den Altern x bzw. $x + t$ beziffert. Im fertigen Nomogramm wird das (ξ, η) -Koordinatensystem zum Verschwinden gebracht.

Die durch den Ansatz (30) festgelegten Koordinaten müssen nun für jedes Alter x und jedes Zwischenalter $x + t$ berechnet und tabelliert werden. Da die Z^α -Skala eine reguläre ist, müssen ihre Werte nicht berechnet werden. Wir legen folgende Tabellen an:

Tabelle 1. Berechnung von η_1 , Zähler von η_3 und $2,06 a_{x+t,60}$ nach (30).

$x+t$	q_{x+t}	vq_{x+t+i}	5000 (vq_{x+t+i})	10 000 (vq_{x+t}) + 200	$a_{x+t,60}$	$2(1+\alpha)$ $a_{x+t,60}$
20	0,00565	0,02856	142,8	235,6	23,612	48,640
25	394	2884	144,2	238,4	21,784	44,875
30	412	2902	145,1	240,2	19,687	40,555
35	486	2974	148,7	247,4	17,305	35,650
40	643	3127	156,4	262,7	14,636	30,150
45	921	3399	169,9	289,9	11,671	24,042
50	1544	3811	190,5	331,1	8,361	17,223
55	1950	4402	220,1	390,2	4,571	9,416
60	2843	5274	263,7	447,4	—	—

Tabelle 2. Berechnung des Nenners von ξ_3 : $\bar{\gamma} = \frac{2,06 a_{x+t,60}}{a_{x,60}}$.

$\begin{smallmatrix} x \\ x+t \end{smallmatrix}$	20	25	30	35	40	45	50	55
20	0,94							
25	1,0895	0,94						
30	1,2824	1,1383	0,94					
35	1,4901	1,3635	1,1892	0,94				
40	1,7231	1,6160	1,4685	1,2577	0,94			
45	1,9818	1,8964	1,7788	1,6107	1,3573	0,94		
50	2,2706	2,2094	2,1252	2,0047	1,8232	1,5243	0,94	
55	2,6012	2,5677	2,5217	2,4559	2,3567	2,1392	1,8738	0,94
60	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0

Die tabellierten Koordinaten $\xi_1, \dots, \eta_3$ werden auf ein Zeichenblatt übertragen. Die richtige Verbindung der Punkte und die Bezifferung der Verbindungskurven liefert das gesuchte Nomogramm.¹⁾

¹⁾ Es empfiehlt sich, das Nomogramm auf Material mit kleiner Dehnung zu zeichnen. Bei gutem Zeichenpapier und bei sorgfältig behandelten Lichtpausen und Photokopien liegt der Verzerrungsfehler innerhalb des Ablesefehlers. Als beste Zeichenunterlagen haben sich die mit Papier überzogenen Aluminiumplatten erwiesen, die im Vermessungsdienst verwendet werden.

Das Übertragen der Koordinaten auf die Zeichnung kann mit Winkel und Lineal vorgenommen werden. Der einfachere und genauere Weg ist aber der: Man ent-

Tabelle 3. Berechnung der Koordinaten ξ_3, η_3 nach (30).

$\begin{array}{c} x \\ \hline x+t \end{array}$	20	25	30	35	40	45	50	55	60
20	212,8 250,6	$= \xi_3$ $= \eta_3$							
25	183,6 218,8	212,8 253,6							
30	156,0 187,3	175,7 211,0	212,8 255,5						
35	134,2 166,0	146,7 181,5	168,2 208,0	212,8 263,2					
40	116,1 152,5	123,8 162,6	136,2 178,9	159,0 209,9	212,8 279,5				
45	100,9 146,3	105,5 152,9	112,4 163,0	124,2 180,0	147,4 213,6	212,8 308,4			
50	88,1 145,8	90,5 149,9	94,1 155,8	99,8 165,1	109,7 181,6	131,2 217,2	212,8 352,2		
55	76,9 150,0	77,9 152,0	79,3 154,7	81,4 158,9	84,9 165,6	93,8 182,9	106,7 208,3	212,8 415,1	
60	66,6 159,1	66,6 159,1	66,6 159,1	66,6 159,1	66,6 159,1	66,6 159,1	66,6 159,1	66,1 159,1	66,6 159,1

Die folgende Abbildung 10 zeigt im einzelnen den konstruktiven Aufbau des nach Ansatz (30) und den obigen Tabellenwerten gezeichneten Nomogramms I. ¹⁾

Anhand des Nomogramms I behandeln wir ein praktisches Zahlenbeispiel zur nomographischen Ermittlung des Wertes Z^a der Zwischenprämie: Gemischte Versicherung über Fr. 10 000.-; Zillmersatz $\alpha = 30\text{‰}$; Eintrittsalter $x = 20$, Endalter $z = 60$. Gesucht ist für $x+t = 40$ die Zwischenprämie Z^a , wenn die Aussetzung der normalen Prämienzahlung für ein Jahr gewährt wird.

wirft das Nomogramm auf einem technischen Papier (Millimeter-, Logarithmenpapier etc.) und sticht dann die Punkte mit einer Nadel auf eine neutrale Unterlage durch. Es ist anzustreben, das Nomogramm nicht auf dem technischen Papier zu belassen, da das aufgedruckte Koordinatennetz beim Ablesen störend wirkt.

¹⁾ Das Nomogramm ist nur für fünfjährige Intervalle entworfen.

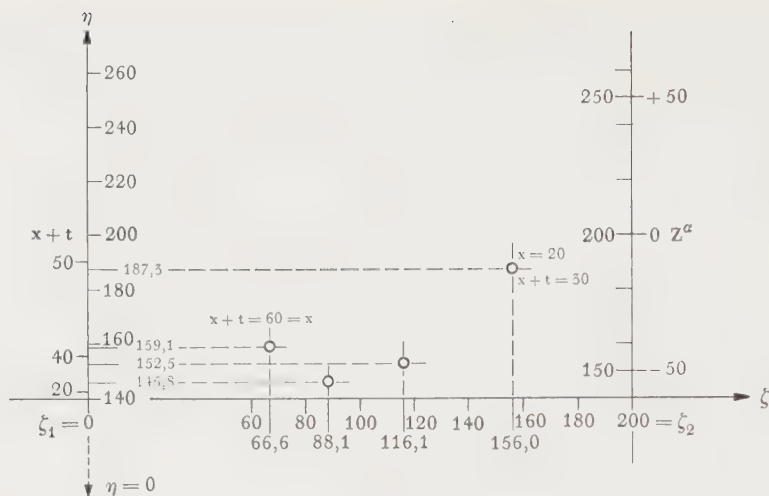


Abbildung 10: Aufbau des Nomogramms I

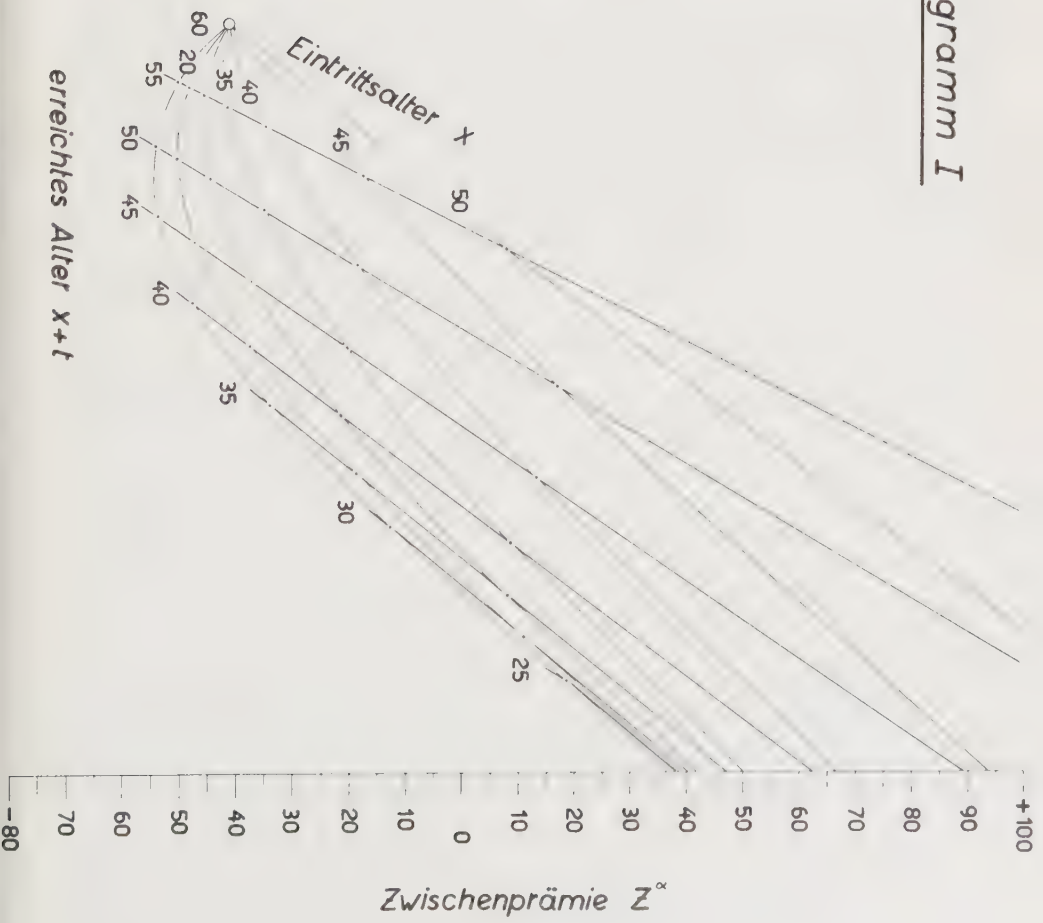
Das Nomogramm löst diese Aufgabe in einer einzigen Ablesung. Wir legen dazu die Ablesegerade auf der $(x+t)$ -Leiter durch den Punkt $x+t = 40$ und im Kurvennetz durch den Schnittpunkt der x -Kurve $x = 20$ mit der $(x+t)$ -Kurve $x+t = 40$. Auf der Ergebnisleiter Z^a kann dann unmittelbar der Wert $Z^a = -50$ Fr. abgelesen werden. Im Vergleich dazu ergeben die Formeln (8) bzw. (9) die Zwischenprämie genau gerechnet zu $Z^a = -50,36$ Fr. Der Ablesefehler beträgt also kaum 1% der Ausgleichszahlung Z^a und nur etwa $1/2000$ der Versicherungssumme.

§ 2. Nomogramm II. Typ II.

Das im letzten Paragraphen behandelte Nomogramm ist wohl eine Lösung unseres Problems, aber wie sich bald zeigen wird, ist es noch nicht die beste. Unter Annahme eines konstanten Endalters z kann Gleichung (9) auch in der Form geschrieben werden

$$Z^a + i = \frac{(vq_{x+t} + i)(1+a)a_{x+t,(z)}}{a_{x,(z)}} \quad (9a)$$

Nomogramm I



erreichtes Alter $x+t$

60
55
50
45
40
35
20

erreichtes Alter $x+t$

Eintrittsalter x
50
45
40
35
30
25
20

Zwischenprämie Z^α

+100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80

Dadurch erscheint unmittelbar die *Strukturgleichung* für den Nomogramm-
typ II

$$f_1(\alpha) \cdot f_3(\gamma) + f_2(\beta) = 0$$

mit

$$f_1(\alpha) = Z^\alpha + i, \quad f_2(\beta) = -(vq_{x+t} + i)(1 + \alpha)a_{x+t,(z)} \quad \text{und} \\ f_3(\gamma) = a_{x,(z)}.$$

Der Ansatz für deren Vertafelung lautet

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= l \cdot f_1(\alpha); \\ x_2 &= q, & y_2 &= qc + lmf_2(\beta); \\ x_3 &= \frac{qc}{1 + mf_3(\gamma)}, & y_3 &= \frac{qc}{1 + mf_3(\gamma)} - cx_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Das Nomogramm soll wieder im Format Din A4 entworfen werden. Wir wollen Z^α nur im Bereich von $+0,015$ bis $-0,003$ darstellen. Entsprechend dieser Begrenzung läuft $(Z^\alpha + i)$ von $+0,040$ bis $+0,022$, also über eine Spanne von $0,018$. Der Bereich von $-f_2(\beta) = (vq_{x+t} + i)(1 + \alpha)a_{x+t,(z)}$ erstreckt sich für $x = 20$ und $z = 60$ von $+0,69459$ bis 0 und beträgt also etwa $0,7$. Wenn die Leitern von $Z^\alpha + i$ und $(vq_{x+t} + i)(1 + \alpha)a_{x+t,(z)}$ ungefähr gleich lang werden sollen, muß $Z^\alpha + i$ in 39mal größerem Maßstab gezeichnet werden; wir wählen ihn gerade 50mal größer.

Unter Berücksichtigung dieser Voraussetzungen bestimmen wir die Parameter wie folgt:

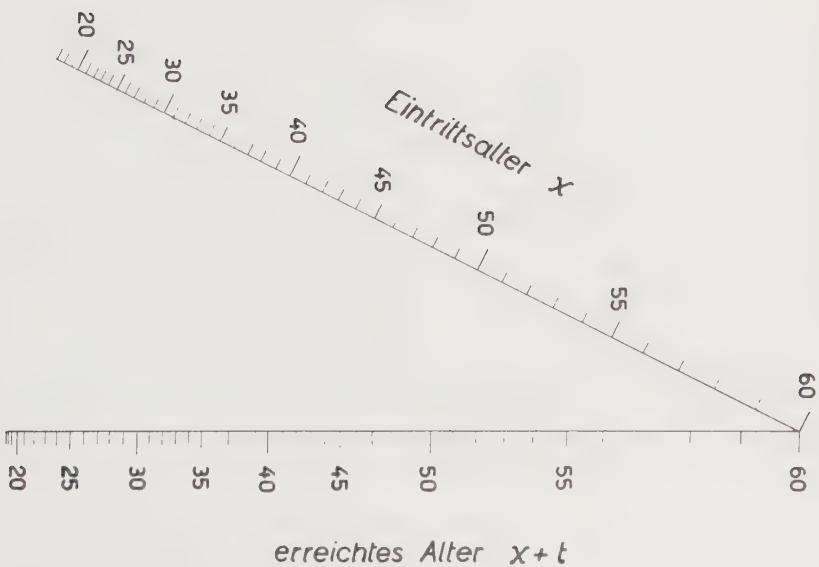
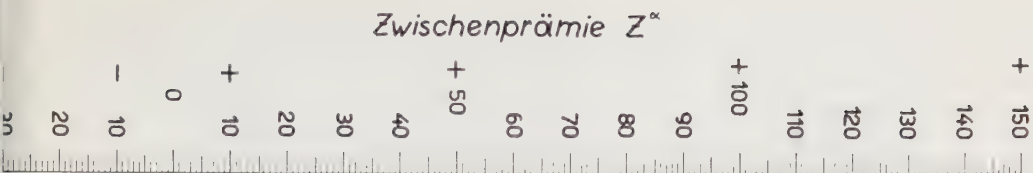
$$l = 10000, \quad lm = 200, \quad m = 0,02, \quad q = 200, \quad c = 2$$

und erhalten aus (31) als Grundlage für die Vertafelung der Gleichung (9a) den Ansatz

$$\begin{aligned} Z^\alpha\text{-Leiter: } x_1 &= 0, & y_1 &= 10000(Z^\alpha + i) = 10000 Z^\alpha + 250; \\ (x+t)\text{-Leiter: } x_2 &= 200, y_2 &= 200 \cdot 2 - 10000 \cdot 0,02(vq_{x+t} + i)(1 + \alpha)a_{x+t,(z)}; \\ x\text{-Leiter: } x_3 &= \frac{200}{1 + 0,02a_{x,(z)}}, & y_3 &= \frac{2 \cdot 200}{1 + 0,02a_{x,(z)}} = 2x_3. \end{aligned}$$

Die Ordinate y_1 , welche durch den Nullpunkt x_1 geht, nimmt die Z^α -Teilung auf und die im Abstand von 200 mm dazu parallele y_2 -Ordinate wird Träger der mit $x+t$ bezifferten Skala. Die nach dem Eintrittsalter x bezifferten Punkte (x_3, y_3) liegen auf der Geraden $y_3 = 2x_3$ mit der Steigung

Nomogramm II



$n = 2$. Die Z^a -Teilung ist eine reguläre, und Z^a selbst muß wiederum nicht berechnet werden. Die Werte der x - und der $(x+t)$ -Skalen werden rechnerisch ermittelt und punktweise in die Zeichnung eingetragen. Die Tabelle 4 gibt für einige Alter die Koordinaten wieder.

Tabelle 4. Koordinaten für das Nomogramm II

$x+t$	y	x	y
20	261,082	135,850	271,70
25	270,580	139,310	278,62
30	282,310	143,510	287,02
31	284,666	144,444	288,88
32	286,956	145,420	290,84
33	289,256	146,436	292,87
34	291,618	147,486	294,97
35	293,980	148,580	297,16
40	305,720	154,720	309,44
50	334,360	171,356	342,71
60	400,000	200,000	400,000

Ablesebeispiel: Gemischte Versicherung über Fr. 10000.—

$$x = 20, \quad x+t = 31, \quad z = 60; \quad a = 30\%_{00}$$

$Z^a = -5,50$ Fr. nomographisch ermittelt,

$Z^a = -5,76$ Fr. berechnet.

§ 3. Nomogramm III. Typ I.

Wir lassen die Annahme des konstanten Endalters fallen und versuchen ein Nomogramm zu entwerfen, das die Bestimmung der Zwischenprämie Z^a für verschiedene Endalter gestattet.

Dies ist unter bestimmten Einschränkungen möglich; Gleichung (9) in der Form

$$(Z^a + i) \frac{1}{1 + a} = (vq_{x+t} + i) a_{x+t,z} \frac{1}{a_{x,z}}$$

wird logarithmiert, also

$$\log \frac{Z^a + i}{1 + a} = \log \left[(vq_{x+t} + i) a_{x+t,z} \right] - \log a_{x,z} . \quad (32)$$

Diese Gleichung stimmt mit der *Strukturgleichung* des Nomogrammtyps I überein, wenn

$$f_1(\alpha) = \log \frac{Z^\alpha + i}{1 + \alpha}, \quad f_2(\beta) = \log a_{x,z} \text{ und } f_3(\gamma) = -\log \left[(vq_{x+t} + i) a_{x+t,z} \right]$$

gesetzt wird.

Den drei Variablen α, β, γ von (19) sollen in der Formel (32) die Variablen $Z^\alpha, x, x+t$ entsprechen; somit wird das Endalter als Veränderliche vorerst außer Betracht fallen. Durch geeignete Überlagerung mehrerer gleichgebauter Nomogramme, welche für je ein konstantes Endalter entworfen werden, können wir jedoch ein einziges Nomogramm gewinnen, das das Alter z gewissermaßen als vierte Variable in sich schließt.

Zur Vertafelung von Gleichung (32) dient der Ansatz

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad y_1 &= \frac{l}{\varrho - \sigma} \log \frac{Z^\alpha + i}{1 + \alpha} = \frac{l}{\varrho - \sigma} \left[\log (Z^\alpha + i) - \log (1 + \alpha) \right]; \\ x_2 &= \varrho m, \quad y_2 = \frac{l}{\sigma} \log a_{x,z}; \\ x_3 &= \sigma m, \quad y_3 = \frac{-l}{\varrho} \cdot (-) \log \left[(vq_{x+t} + i) a_{x+t,z} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Wir stellen die Zeichnung im Format Din A4 her und wählen den Maßstab $l = 250$ mm. Anhand einer kleinen Skizze wird sofort ersichtlich, daß die beste Anordnung der x - und $(x+t)$ -Leitern mit $\varrho = 1$, $\sigma = 2$ und $m = 1$ erreicht wird.

Durch diese Festlegung der Parameter finden wir den Ansatz

$$\begin{aligned} Z^\alpha \quad \text{-Leiter: } x_1 &= 0, \quad y_1 = -250 \left[\log (Z^\alpha + i) - \log (1 + \alpha) \right]; \\ x \quad \text{-Leiter: } x_2 &= 1, \quad y_2 = +125 \log a_{x,z}; \\ (x+t)\text{-Leiter: } x_3 &= 2, \quad y_3 = +250 \log \left[(vq_{x+t} + i) a_{x+t,z} \right]. \end{aligned}$$

Mit den logarithmischen Einheiten

$$\frac{-l}{\varrho - \sigma} = \frac{l}{\varrho} = 250 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \frac{l}{\sigma} = 125 \text{ mm}$$

stehen uns fertige Maßstäbe¹⁾ zur Verfügung. Dadurch wird der Rechenaufwand bedeutend verkleinert; denn für die Herstellung der Leitern sind nur noch die Werte $a_{x,z}$ und $(vq_{x+t} + i) a_{x+t,z}$ numerisch zu ermitteln. In der nachstehenden Tabelle 5 sind diese Werte für einige Alter zusammengestellt.

Tabelle 5. Ermittlung von $a_{x,z}$ und $(vq_{x+t} + i) a_{x+t,z}$

x x + t	$vq_{x+t} + i$	$a_{x,z}$			$a_{x+t,z}(vq_{x+t} + i)$		
		z = 50	z = 55	z = 60	z = 50	z = 55	z = 60
20	0,02856	20,281	22,125	23,612	0,57922	0,63190	0,67435
25	2884	17,942	20,069	21,784	51745	57877	62825
30	2902	15,255	17,708	19,687	44265	51388	57131
35	2974	12,177	15,016	17,305	36215	44658	51465
40	3127	8,675	11,976	14,636	27127	37449	45766
45	3399	4,670	8,546	11,671	15873	29028	39670
50	3811		4,629	8,361		17642	31864
55	4402			4,571			20122
60	5274						
65	6654						
70	8833						

Wir zeichnen zuerst die drei parallelen Träger für das Endalter $z = 50$ auf, deren Abstände zu $\varrho = 50$ mm und $\sigma = 100$ mm angenommen werden. An den Träger $x_3 = 100$ legen wir die nach y_3 geteilte und mit $x+t$ bezifferte Leiter. Auf dem mittleren Träger $x_2 = 50$ ist die x -Skala aufzutragen so, daß sie auf mittlere Höhe der $(x+t)$ -Leiter zu liegen kommt. Figur 11 zeigt schematisch die Anordnung der Träger und der Teilungen. Die nach y_1 geteilte Leiter ist im entgegengesetzten Sinn zur x -Leiter in die y -Achse des Koordinatensystems zu verlegen und direkt mit Z^a zu beziffern. Ihre Anordnung auf dem $x_1 = 0$ -Träger geschieht am einfachsten dadurch, daß wir ein Wertetripel $x, x+t, Z^a$ numerisch ermitteln.²⁾ Die logarithmische Z^a -Skala ist dann auf dem Träger zu verschieben, bis der berechnete Punkt Z^a auf der Verbindungsgeraden der Punkte x und $x+t$ der beiden andern Leitern liegt.

Damit ist das Nomogramm für das Endalter $z = 50$ entworfen.

¹⁾ Logarithmisches Papier, Rechenschieber.

²⁾ z. B. Versicherungssumme 10000; $x = 30$, $x+t = 35$, $z = 50$; $Z^a = -5,45$.

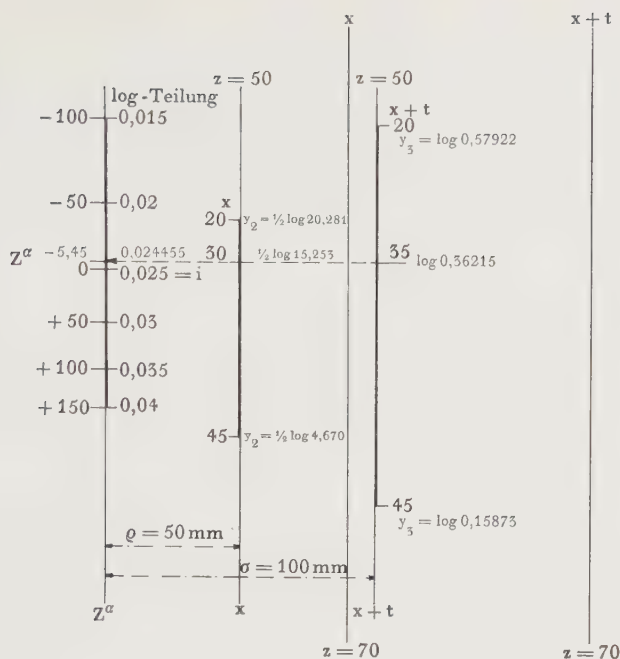


Abbildung 11: Aufbau des Nomogramms III

Die weiteren Nomogramme für die gebräuchlichen Endalter 55, 60, 65 und 70 ergeben sich nach ganz analogem Vorgehen. Die Z^a -Leiter kann unverändert beibehalten werden, nur die x - und $(x+t)$ -Teilungen müssen neu berechnet und gezeichnet werden (vgl. *Nomogramm III*).

Diese nomographisch sehr einfache Darstellung der Zwischenprämie mit logarithmischen Teilungen bietet die weitere Möglichkeit, den Zillmersatz a als fünfte Variable aufzunehmen. Wie aus dem Ansatz (33) ersichtlich ist, tritt der Zillmersatz nur in der Ordinate $y_1 = -l \log(Z^a + i) + l \log(1 + a)$ und daselbst als additive Größe auf. Wenn wir daher den Z^a -Träger als beweglichen Schieber ausbilden, kann a als Veränderliche eingeführt werden. Für jeden vorgegebenen Zillmersatz muß dann einfach der Schieber um die Strecke $l \log(1 + a)$ aus der «Netto-Lage» ($a = 0$) nach oben verschoben werden.

Als Ablesebeispiel für das Nomogramm III untersuchen wir fünf mit dem Alter $x = 25$ beginnende und mit verschiedenen Altern ablaufende ge-

mischte Versicherungen mit den Versicherungssummen Fr. 10000 und einem Zillmersatz von $30\%_{00}$.

Die Zwischenprämie für das erreichte Alter $x+t = 40$ wird in der gewohnten Weise gefunden durch Anlegen einer Ablesegeraden an die Teilstriche $x = 25$ und $x+t = 40$ der mit gleichem Endalter z gekennzeichneten x - bzw. $(x+t)$ -Leitern. Die Gerade läßt dann auf der Z^a -Teilung unmittelbar die Werte ablesen:

z	50	55	60	65	70
nomographisch ermittelt	-94,00	-57,50	-33,50	-17,00	-6,50
berechnet	-94,26	-57,79	-33,59	-17,34	-6,50
Abweichung	- 0,26	- 0,29	- 0,09	- 0,34	—

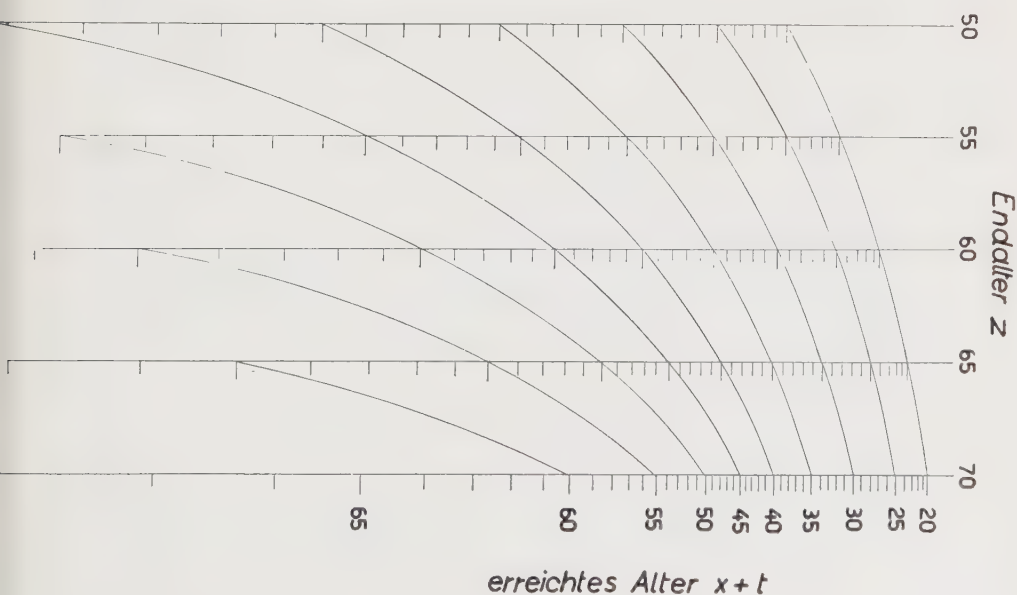
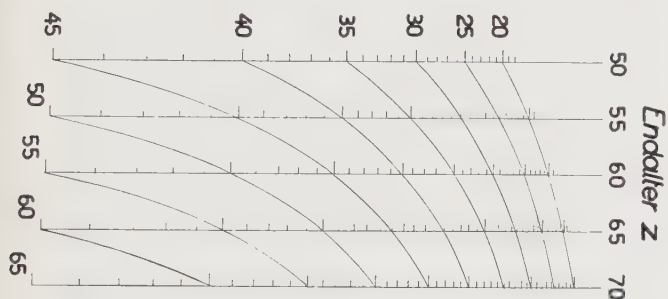
Die Abweichungen der nomographisch bestimmten Zwischenprämien von den nach Formel (9) berechneten betragen demnach kaum ein halbes Prozent.

Nomogramm III

Zwischenprämie Z^α



Eintrittsalter x



Zusammenfassung

Mit der Konstruktion der Nomogramme I–III haben wir ein Rechenhilfsmittel gewonnen, das uns von jeglicher Zahlenrechnung und dem Gebrauch von Tabellenwerken vollkommen unabhängig macht. Die direkte Bezifferung der Skalen mit den Grundgrößen x , $x+t$, z und Z^a und die einfache Ablesevorschrift ermöglichen schließlich jeder ungeübten Arbeitskraft eine sofortige und sichere Handhabung des Rechenblattes. Die Ermittlung von Zahlenwerten geschieht mit dem Nomogramm bedeutend rascher als mit irgend einer Rechenmaschine.

Die Genauigkeit des Nomogramms im Format Din A4 genügt den Erfordernissen der Praxis. Sie kann jedoch durch Wahl eines größeren Formates erheblich gesteigert werden. Es ist auch darauf hinzuweisen, daß durch die graphische Zusammenfassung des gesamten Zahlenkomplexes in einem Rechenblatt die *Fehlerquellen auf ein Minimum herab gesenkt* werden. Die Gleichungen (10) und (11) der Zwischenprämie für zwei- und dreijährige Aussetzungszeit können, infolge ihres strukturell genau gleichen Aufbaus wie Gleichung (9), auch mit denselben Ansätzen wie diese nomographisch gelöst werden.

Der Arbeitsaufwand für die Bearbeitung des Zahlenmaterials und für die Konstruktion des Nomogramms ist kleiner als derjenige für die Erstellung eines Tabellenwerkes. Dies ist schon daraus ersichtlich, daß für keines unserer Rechenblätter die Zwischenprämie erst rechnerisch ermittelt werden muß, damit sie vertafelt werden kann.

Die Überlegenheit der Nomogramme über Tabellen tritt deutlich hervor, wenn die *funktionalen Änderungen* der vier Veränderlichen x , $x+t$, z und Z^a untersucht werden sollen. Diese Aufgabe, die für Planungsarbeiten von großer Wichtigkeit ist, kann mit Tabellenwerken vielfach nur unter erheblichen Schwierigkeiten gelöst werden. Das Nomogramm hingegen löst solche Fragen beinahe spielend.

Wir wollen zum Schluß anhand des Nomogramms III zwei solche Untersuchungen durchführen:

1. Für welche erreichten Alter nimmt die Zwischenprämie bei gegebenem Eintritts- und Schlußalter einen Wert ≤ 0 an?

Wir legen die Ablesegerade durch den Punkt mit der Zwischenprämie Null und durch den Punkt mit dem Eintrittsalter x . Alle Alter $x+t$, die

dann unterhalb des Schnittpunktes der Ablesegeraden mit der $(x+t)$ -Leiter liegen, ergeben negative Ausgleichszahlungen Z^a . Die nachstehende Tabelle gibt einige derart ermittelte Werte wieder:

x	z	x+t
20	50	≥ 27
	55	$28\frac{1}{2}$
	60	30
	65	32
	70	33
30	50	$\geq 34\frac{1}{2}$
	55	$36\frac{1}{2}$
	60	$38\frac{1}{2}$
	65	41
	70	45

2. Für welche Alterskombinationen wird die Zwischenprämie Null?

Wir halten die Ablesegerade fest im Punkt $Z^a = 0$ als Drehpunkt und lesen auf den andern Skalen direkt die sich entsprechenden Alter ab. In der folgenden Tabelle sind einige nomographisch ermittelte Alter zusammengestellt:

x	z	x+t
35	50	$38\frac{3}{4}$
40	55	45
45	60	$51\frac{3}{4}$
50	65	$58\frac{3}{4}$
55	70	$65\frac{3}{4}$

Allgemeingültig können wir auf Grund unserer Arbeit aussagen, daß die Nomographie, sinnvoll angewendet, für den Praktiker im Versicherungsbetrieb ein wertvolles Rechenhilfsmittel sein wird.

Literaturverzeichnis

I. Zeitschriften

Amws	Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung
Av *	Tschechoslowakische Zeitschrift für die Aktuarwissenschaft
Awf-m	Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung beim Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit - Mitteilungen
Biaf	Bulletin de l'Institut des Actuaire's français
Bvm	Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete
Bdvm	Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs-Mathematik
Drb	Das rationelle Büro
Gmf	Giornale di Matematica Finanziaria
Jia	Journal of the Institute of Actuaries
Jia,ss	Journal of the Institute of Actuaries, Students' Society
Kb	Berichte der Internationalen Kongresse der Versicherungsmathematiker
Mvsv	Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungs-mathematiker
Nzrw	Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen
Sa	Skandinavisk Aktuarietidskrift
Tasa	Transactions of the Actuarial Society of America
Tfa	Transactions of the Faculty of Actuaries
Vw	Versicherungswirtschaft
Zgzw	Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft

II. Risikozwischenversicherung

1. Jecklin H.: Die Risikozwischenversicherung. Bvm, 5, 1954.
2. Zwinggi E.: Versicherungsmathematik. Basel 1945.

III. Nomographie

A. Lehrbücher

5. Grosse W.: Graphische Papiere und ihre vielseitige Anwendung, Düren 1918.
4. D'Ocagne M.: Traité de Nomographie. Paris 1921.
5. Krauss F.: Die Nomographie. Berlin 1922.
6. Konorski B.M.: Die Grundlagen der Nomographie, Berlin 1925.
7. Laemann O.: Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln, Berlin 1925.
8. Werkmeister P.: Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln, Berlin 1925.
9. D'Ocagne M.: Calcul graphique et Nomographie, Paris 1924.
10. Schwerdt H.: Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage, Berlin 1924.
11. Soreau R.: Nomographie ou Traité des Abaques, Paris 1924.
12. Wenner F.: Praktische Rechenbildkunde. Aachen 1926.
13. Schwerdt H.: Einführung in die praktische Nomographie, Berlin 1927.
14. Mader K.: Nomographie. Handbuch der Physik, Bd. 3, Berlin 1928.

15. *v. Pirani M.*: Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik, Berlin/Leipzig 1931.
16. *Schwerdt H.*: Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik, Berlin 1931.
17. *Adolph M.*: Einführung in die Nomographie, Leipzig 1942.
18. *Cupr K.*: Einführung in die Nomographie, Prag 1944.
19. *Douglas R.D., Adams D.P.*: Elements of Nomography, New York and London 1947.
20. *Diercks H., Euler H.*: Praktische Nomographie, Düsseldorf 1948.
21. *Körwien H.*: Graphisches Rechnen (Nomographie), Wittenberg 1948.
22. *Luckey P.*: Nomographie, Leipzig 1949.
23. *Schroeder R.*: Praktische Einführung in die Nomographie, München 1951.
24. *Kießler F.*: Angewandte Nomographie I und II, Essen 1952.
25. *Müller A.*: Nomographie für die technische Praxis, Leipzig 1952.
26. *Meyer zur Capellen W.*: Leitfaden der Nomographie, Berlin 1953.
27. *Happach V.*: Nomographie (Graphisches Rechnen), i. V.

B. Nomographie in der Finanz- und Wirtschaftsmathematik

28. *Fleury E.*: Note sur le calcul du taux des uports en Bourse, Biaf, to 17, no 68, 1907.
29. *Luckey P.*: Abbaco per il calcolo della annualità, Gmf, v 7, 1925.
30. *Lenzi E.*: Risoluzione grafica di problemi sulle annualità, Gmf, v 8, 1926.
31. *Kamber F.*: Le calcul du taux de rendement des obligations remboursables à une date déterminée, Mvsv, h 23, 1928.
32. *Gabel J.A.*: Nomographische Lösungen von Kurs- und Rentabilitätsaufgaben, Amsterdam 1935.
33. *Scholze O., Frenzen E.*: Tokogramm, direktes Ablesen von Laufdauern, Kursen und Effektiv-Zinsen, Nzvw, Berlin 1936.
34. *Boschan P.*: Zwei Anwendungen graphischer Methoden in der Anleiherechnung, Kb 11, v 5, 1937.
35. *Wilson J.*: Some notes on a nomogram giving the relation between price and yield of terminable bonds bearing a fixed rate of interest, Jia, v 68, 1937.
36. *Duc Ch.*: Nomogrammes et abaques financiers, Biaf, to 46, 1947.
37. *Lambert R.*: Détermination nomographique du taux de rendement des obligations, Biaf, to 50, 1951.

C. Nomographie in der Versicherungsmathematik

38. *Solberg N.*: Eine graphische Darstellung der Leibrente, der einmaligen Prämie, der Jahresprämie und der Prämienreserve, Sa, jg 1, 1918.
39. *Böhmer P.*: Versicherungsgeometrie, Zgfvw, b 21, 1921.
40. *Hintikka E.*: Einige versicherungsmathematische graphische Rechentafeln, Sa, jg 6, 1923.
41. *Riedl J.*: Eine Sammlung von graphischen Rechentafeln der Versicherungsmathematik, Wien 1925.

42. *Potin L.*: Sur une application de la nomographie au calcul des capitaux constitutifs des rentes. *Biaf*, to 32, 1926.
43. *Havlik F.*: Über die Bedeutung und Anwendung der Nomogramme in der Versicherungsmathematik. *Av*, b 1, 1930.
44. *Schweer W.*: Eine graphische Methode zur Berechnung der Konstanten der Makeham-Gompertzschen Formel. *Kb* 10, v 5, 1934.
45. — Über graphische Methoden in der Versicherungsmathematik. *Amws*, b 2, 1936.
46. *Wünsche G.*: Die graphische Methode in der Mathematik der Invaliditätsversicherung. *Bvm*, b 3, 1936.
47. *Caufourier P.*: Resolution de problèmes d'actuariat par le planimètre-spiralographie. *Biaf*, to 45, 1937.
48. *Wünsche G.*: Nomographie und Versicherungstechnik. *Nzvw*, no 20, 1937.
49. *Schwerdt H., Wünsche G.*: Nomogramm zur Ermittlung von Versicherungswerten. *Awf-m*, jg 20, 1938.
50. *Timpe A.*: Nomographie in der Versicherungsmathematik. *Amws*, b 4, 1938.
51. *Wünsche G.*: Eine nomographische Behandlung des Zinsfußproblems in der Lebensversicherung. *Amws*, b 4, 1938.
52. — Grundzüge einer nomographischen Methode der Versicherungsmathematik. *Bvm*, b 4, 1938.
53. — Rückkaufswert und eingezahlte Beiträge. *Nzvw*, no 38, 1938.
54. *Foigt H.*: Über die Berechnung der Nettowerte verbundener Renten mittels eines Nomogramms, *Borna* 1939.
55. *Wünsche G.*: Der Einfluß einer Herabsetzung des Rechnungszinsfußes auf die Deckungsrücklage in der Lebensversicherung. *Awf-m*, jg 21, 1939.
56. *Christen H., Linder A.*: Une application de la nomographie au système complète de rentes viagères de Blaschke-Gram. *Sa*, jg 25, 1940.
57. *Sarason H.M., Donald B.W.*: Graphical calculation of actuarial functions, *Tasa*, v 42, 1941.
58. *Michel J.G.L.*: A nomogram for calculating of extended terms. *Jia.ss*, v 8,5, 1949.
59. *Wünsche G.*: Zur Berechnung der Deckungsrücklage nach der Währungsumstellung. *Vw*, jg 4, no 6, 1949.
60. — Die Genauigkeit der «Verschiebungsmethode». *Vw*, jg 4, no 22, 1949.
61. — The nomographic estimation of the influence of substandard mortality on the policy value. *Jia.ss*, v 8,4, 1949.
62. — Moderne Nomographie als Grundlage rationeller Rechentechnik in der Wirtschaftspraxis. *Drb*, jg 1, 1950.
63. *Cooksey W.J.*: Nomograms with particular reference to their use in facilitating the tabulation of paid-up and surrender values based on various formulas, *Tfa*, v 20, 1951.
64. *Wünsche G.*: Zur Rationalisierung der versicherungsmathematischen Rechen-technik, *Bdvm*, b 1, 1951.
65. *Zimmermann H.*: Nomogramme zur «F-Methode», *Mvsv*, b 51, 1951.

Curriculum vitae

Am 21. April 1926 wurde ich als Sohn des Josef Pfulg, Fabrikant, und der Hedwig geb. Neff in Olten geboren. Heimatberechtigt bin ich in Flühli. Nach Absolvierung der Schulen in Olten und der Realschule in Solothurn, bestand ich im Herbst 1945 die Maturitätsprüfung Typ C. Hierauf begann ich die Studien an der Universität Basel als Vorbereitung für die Bezirkslehrerprüfung in Solothurn. In den Ferien versah ich einige Stellvertretungen an Solothurner Schulen und erwarb mir dann im Herbst 1948 das solothurnische Bezirkslehrerpatent technischer Richtung.

Nach einem Unterbruch von einem Jahr, bedingt durch längere Militärdienstleistungen und Tätigkeit im elterlichen Geschäft, setzte ich die Studien an der Universität Basel in den Fächern Versicherungsmathematik, Mathematik und Nationalökonomie fort.

Vorlesungen hörte ich bei den Herren Professoren Batschelet, Euchner, Erlenmeyer, Fierz, Furlan, Gürtler, Häberlin, Huber, Miescher, Ostrowski, Portmann, Probst, Renfer, Salin, Speiser, Wagner und Zwinggi.

Die Dissertation entstand unter der Leitung von Herrn Professor Dr. Ernst Zwinggi. Ich bin ihm für sein stetes Interesse und die vielen wohlwollenden Anregungen zu bestem Dank verpflichtet.

Wertvolle Hinweise für den nomographischen Teil der Arbeit verdanke ich Herrn Dr. G. Wünsche, München.

Marcel Pfulg

Olten, den 20. Januar 1953.

